

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ & ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ιδιότητες των πράξεων

$$(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$$

$$(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\delta$$

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

$$\text{Αν } \gamma \neq 0, \text{ τότε : } \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$$

$$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

2.

Ιδιότητες των δυνάμεων

$$\alpha^{\kappa} \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda} \qquad \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$$

$$\alpha^{\kappa} \beta^{\kappa} = (\alpha\beta)^{\kappa} \qquad \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$$

$$(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\lambda}$$

3.

Οι ταυτότητες

Μια για πάντα μάθε τις ταυτότητες

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$

Στα Μαθηματικά ,
αν κάτι δε θυμόμαστε σωστά
είναι σα να μη το γνωρίζουμε
καθόλου

Μάθε τις ταυτότητες και αντίστροφα.

$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$	Τέλειο τετράγωνο
$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$	» »
$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$	Από άθροισμα σε γινόμενο
$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3$	» »
$\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3$	» »
$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$	Από γινόμενο σε άθροισμα
$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$	
$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha = (\alpha + \beta + \gamma)^2$	

4.

Μέθοδοι απόδειξης ισότητας ή ανισότητας

- i) **Ευθεία απόδειξη :** Ξεκινάμε με μια υπόθεση και με συνεπαγωγές φθάνουμε στο αποδεικτέο.
- ii) **Με ισοδυναμίες :** Ξεκινάμε με το αποδεικτέο και με ισοδυναμίες φθάνουμε σε κάτι που ισχύει
- iii) **Αντίστροφη ευθεία απόδειξη :** Ξεκινάμε με το αποδεικτέο και με « αρκεί να αποδείξω » φθάνουμε σε κάτι που ισχύει.
- iv) **Απαγωγή σε άτοπο :** Αρνούμεθα το αποδεικτέο και με συνεπαγωγές φθάνουμε σε άτοπο (κάτι που δεν ισχύει)

5.

Μέθοδοι απόδειξης ισοδυναμίας δύο προτάσεων

- i) **Με ισοδυναμίες :** Ξεκινάμε με τη μια πρόταση και με ισοδυναμίες φθάνουμε στην άλλη.
- ii) **Με ευθύ και αντίστροφο :**
 - Ευθύ.** Θεωρούμε υπόθεση τη μία πρόταση και με συνεπαγωγές φθάνουμε στην άλλη.
 - Αντίστροφο.** Θεωρούμε υπόθεση την άλλη πρόταση και με συνεπαγωγές φθάνουμε στην πρώτη

ΣΧΟΛΙΑ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ

1.

Συγκεκριμένος αριθμός χωρίς πρόσημο

σημαίνει ότι είναι θετικός, δηλαδή έχει πρόσημο $+$.

$$4 = +4, \quad \frac{2}{3} = +\frac{2}{3}, \quad \sqrt{2} = +\sqrt{2}$$

2.

Τυχαιός αριθμός a χωρίς πρόσημο

Δε σημαίνει ότι είναι θετικός, αφού μπορεί να έχει μέσα του το « $-$ »

Ακόμη και αν γράψουμε $+a$, δε σημαίνει ότι ο a είναι θετικός.

3.

Οι δύο σημασίες του συμβόλου « $+$ »

i) Μπροστά από αριθμό σημαίνει ότι ο αριθμός είναι θετικός

$$+2, \quad +\frac{1}{3}, \quad +\sqrt{5}$$

ii) Μεταξύ δύο αριθμών σημαίνει την πράξη της πρόσθεσης

$$5+2, \quad -5+2, \quad 5+(-2), \quad -5+(-2)$$

4.

Οι δύο σημασίες του συμβόλου « $-$ »

i) Μπροστά από αριθμό σημαίνει ότι ο αριθμός είναι αρνητικός

$$-2, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\sqrt{5}$$

ii) Μεταξύ δύο αριθμών σημαίνει την πράξη της αφαίρεσης

$$5-2, \quad -5-2, \quad 5-(-2), \quad -5-(-2)$$

5.

Η πράξη της πρόσθεσης**i) Πρόσθεση ομοσήμων**

$$(+3) + (+5) = +8 = 8$$

$$3 + 5 = 8$$

$$(-3) + (-5) = -8$$

Θέτουμε το κοινό πρόσημό τους και προσθέτουμε τους αριθμούς

ii) Πρόσθεση ετεροσήμων

$$(-3) + (+5) = +2 = 2$$

$$-3 + (+5) = +2 = 2$$

$$-3 + 5 = +2 = 2$$

$$3 + (-5) = -2$$

Θέτουμε το πρόσημο του μεγαλύτερου και αφαιρούμε τους αριθμούς

6.

Η πράξη της αφαίρεσης

$$7 - 2 = 5 \quad (\text{προφανές})$$

$$5 - 6 = 5 + (-6) = -1$$

$$5 - (-6) = 5 + 6 = 11$$

Αν το αποτέλεσμα δεν είναι προφανές, μετατρέπουμε την αφαίρεση σε πρόσθεση αλλάζοντας το πρόσημο του δεύτερου αριθμού.

7.

Η επιμεριστική ιδιότητα αντίστροφα

Μας δίνει κοινό παράγοντα : $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$

$$2x + 2y = 2(x + y)$$

$$-4\alpha - 4\beta = -4(\alpha + \beta)$$

$$4\alpha - 4\beta = 4(\alpha - \beta)$$

8.**Ένα λάθος**

$$\alpha\beta = \alpha\gamma \Rightarrow \beta = \gamma \quad (\text{Πρέπει να είναι } \alpha \neq 0).$$

Για το σωστό : 1^{ος} τρόπος

$$\alpha\beta = \alpha\gamma \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha\gamma = 0$$

$$\alpha(\beta - \gamma) = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \beta - \gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \beta = \gamma$$

2^{ος} τρόπος (Διερεύνηση)

$$\alpha\beta = \alpha\gamma \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha\gamma = 0$$

$$\alpha(\beta - \gamma) = 0 \quad (1)$$

- Όταν $\alpha \neq 0$, η (1) γίνεται $\beta - \gamma = 0$
 $\beta = \gamma$
- Όταν $\alpha = 0$, η (1) αληθεύει για κάθε β, γ .

9.**Ισχύουν οι ισοδυναμίες**

i) $\alpha\beta\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \beta = 0 \quad \text{ή} \quad \gamma = 0$

Π.χ $x(x-2)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x-2 = 0 \quad \text{ή} \quad x+3 = 0 \Leftrightarrow$
 $x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2 \quad \text{ή} \quad x = -3$

ii) $\alpha\beta\gamma \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \quad \text{και} \quad \beta \neq 0 \quad \text{και} \quad \gamma \neq 0$

Π.χ $(x+1)x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 0 \quad \text{και} \quad x-1 \neq 0$
 $\Leftrightarrow x \neq -1 \quad \text{και} \quad x \neq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 1$

10.**Η διαίρεση με το 0 είναι αδύνατη.**

Επειδή κάθε κλάσμα δηλώνει διαίρεση, υποχρεώνουμε κάθε παρανομαστή να είναι $\neq 0$, ώστε το κλάσμα να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Π.χ Για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi = \frac{3x-1}{x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού;

Απάντηση : Πρέπει $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι θετικοί και ποιοι αρνητικοί ;

4 , $+4$, -5 , $+(-5)$, $-(-5)$, 0 , α , $-\beta$

Λύση

Θετικοί είναι οι 4 , $+4$, $-(-5)$

Αρνητικοί είναι οι -5 , $+(-5)$

Ας σημειώσουμε ότι : 0 δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός

Καθένας από τους α , $-\beta$ μπορεί να είναι θετικός ,
μπορεί αρνητικός ,
μπορεί 0

Σχόλια 2, 3

2.

Να γίνουν οι πράξεις $-2[x + 3(x - y) + 1]$

Λύση

$$\begin{aligned} -2[x + 3(x - y) + 1] &= -2[x + 3x - 3y + 1] \\ &= -2[4x - 3y + 1] \\ &= -8x + 6y - 2 \end{aligned}$$

Από παρενθέσεις
σε αγκύλες

3.

Να γίνουν οι πράξεις $-2[x + 3(x - y) + 1] - 2(x + y - 1)$

Λύση

$$\begin{aligned} -2[x + 3(x - y) + 1] - 2(x + y - 1) &= 2[x + 3x - 3y + 1] - 2x - 2y + 2 \\ &= -2[4x - 3y + 1] - 2x - 2y + 2 \\ &= -8x + 6y - 2 - 2x - 2y + 2 \\ &= -10x + 4y \end{aligned}$$

Από παρενθέσεις
σε αγκύλες

4.

Να γίνουν οι πράξεις $-2[4[-3(x+2y)+1]-[2(x+y)+3]]$

Λύση

$$-2[4[-3(x+2y)+1]-[2(x+y)+3]] = -2[4[-3x-6y+1]-[2x+2y+3]]$$

Από παρενθέσεις
σε αγκύλες

$$= -2[-12x-24y+4-2x-2y-3]$$

$$= -2[-14x-26y+1]$$

$$= 28x+52y-2$$

5.

Να γίνουν οι πράξεις $(\alpha+\beta)(x+y)$

Λύση

Επιμεριστική

$$(\alpha+\beta)(x+y) = (\alpha+\beta)x + (\alpha+\beta)y = \alpha x + \beta x + \alpha y + \beta y$$

6.

Να γίνει γινόμενο η παράσταση $\alpha x + \beta x + \alpha y + \beta y$

Λύση

$$\alpha x + \beta x + \alpha y + \beta y = (\alpha x + \beta x) + (\alpha y + \beta y)$$

$$= (\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta)y$$

$$= (\alpha + \beta)(x + y)$$

Επιμεριστική
αντίστροφα

7.

Να γίνει γινόμενο η παράσταση $2\alpha x - 2\alpha y - 3\beta x + 3\beta y$

Λύση

$$2\alpha x - 2\alpha y - 3\beta x + 3\beta y = (2\alpha x - 2\alpha y) - (3\beta x - 3\beta y)$$

$$= 2\alpha(x - y) - 3\beta(x - y)$$

$$= (x - y)(2\alpha - 3\beta)$$

Επιμεριστική
αντίστροφα

8.

Να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες

i) $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow$

ii) $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow$

Λύση

i) $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \beta = 0$

ii) $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \quad \text{και} \quad \beta \neq 0$

Ιδιότητες της
θεωρίας**9.**Αν $\alpha x - \beta x + \alpha y - \beta y = 0$ και $\alpha \neq \beta$, να αποδείξετε ότι $x = -y$ **Λύση**

$$\alpha x - \beta x + \alpha y - \beta y = 0 \Leftrightarrow (\alpha x - \beta x) + (\alpha y - \beta y) = 0$$

$$x(\alpha - \beta) + y(\alpha - \beta) = 0$$

$$x(\alpha - \beta) = -y(\alpha - \beta)$$

$$x = -y$$

 $\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha - \beta \neq 0$,
οπότε διαιρούμε τα
δύο μέλη με $\alpha - \beta$ **10.**Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi = 1 + \frac{3x}{2x-10}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.**Λύση**

Πρέπει $2x - 10 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 10 \Leftrightarrow x \neq 5$

Σχόλιο 10

11.Αν $2x - y = 5y + 4x$ και $y \neq 0$, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{x}{y}$ **Λύση**

$$2x - y = 5y + 4x \Leftrightarrow -2x = 6y \Leftrightarrow x = -3y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = -3$$

12.

Αν $\frac{2x+3y}{x-y} = -2$ και $y \neq 0$, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{x}{y}$

Λύση

Περιορισμός: $x - y \neq 0 \Leftrightarrow x \neq y$

$$\frac{2x+3y}{x-y} = -2 \Leftrightarrow 2x + 3y = -2(x - y)$$

$$2x + 3y = -2x + 2y$$

$$4x = -y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = -\frac{1}{4}$$

13.

Να εκτελεστούν οι πράξεις

α) $(x+1)^2$

β) $(x-1)^2$

γ) $(-x+1)^2$

Λύση

α) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

β) $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

γ) $(-x+1)^2 = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$

14.

Να εκτελεστούν οι πράξεις

α) $(-x-1)^2$

β) $(3x+1)^2$

γ) $(3x-2)^2$

Λύση

α) $(-x-1)^2 = [-(1+x)]^2 = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$

β) $(3x+1)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1 = 9x^2 + 6x + 1$

γ) $(3x-2)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$

15.

Να εκτελεστούν οι πράξεις

$$\alpha) (\sqrt{3}+1)^2 \quad \beta) (\sqrt{3}-1)^2 \quad \gamma) (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$$

Λύση

$$\alpha) (\sqrt{3}+1)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$\beta) (\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\gamma) (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha})^2 + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + (\sqrt{\beta})^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \beta$$

16.

Να μετατραπούν σε γινόμενο οι παραστάσεις

$$\alpha) x^2 + 2x + 1 \quad \beta) x^2 - 2x + 1 \quad \gamma) 9x^2 + 6x + 1 \quad \delta) \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2$$

Λύση

$$\alpha) x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$\beta) x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$\gamma) 9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = (3x+1)^2$$

$$\delta) \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 + (\beta^2)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$$

17.

Να εκτελεστούν οι πράξεις

$$\text{i)} (\alpha+1)^3 \quad \text{ii)} \sigma\tau) (\alpha-1)^3$$

Λύση

$$\text{i)} (\alpha+1)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 \cdot 1 + 3\alpha \cdot 1^2 + 1^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$$

$$\text{ii)} (\alpha-1)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2 \cdot 1 + 3\alpha \cdot 1^2 - 1^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1$$

18.

Να μετατραπούν σε γινόμενο οι παραστάσεις

α) $x^2 - 1$

β) $x^2 - 4$

γ) $4x^2 - 9$

δ) $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$

ε) $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1$

Λύση

α) $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$

β) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$

γ) $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3)$

δ) $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1 = (\alpha + 1)^3$

ε) $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 = (\alpha - 1)^3$

19.

Να μετατραπούν σε γινόμενο οι παραστάσεις

α) $x^3 + 1$

β) $x^3 - 1$

γ) $x^3 + 8$

δ) $x^3 - 8$

ε) $x^4 - y^4$

Λύση

α) $x^3 + 1 = x^3 + 1^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

β) $x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$$\begin{aligned} \gamma) \quad x^3 + 8 &= x^3 + 2^3 \\ &= (x + 2)(x^2 - x \cdot 2 + 2^2) \\ &= (x + 2)(x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) \quad x^3 - 8 &= x^3 - 2^3 \\ &= (x - 2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon) \quad x^4 - y^4 &= (x^2)^2 - (y^2)^2 \\ &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) \\ &= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

20.

Να εκτελεστούν οι πράξεις

i) $(x+1)(x-1)$

ii) $(1+2x)(1-2x)$

iii) $(-x-3)(-x+3)$

Λύση

i) $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$

ii) $(1+2x)(1-2x) = 1 - (2x)^2 = 1 - 4x^2$

iii) $(-x-3)(-x+3) = (-x)^2 - 3^2 = x^2 - 9$

21.

Να εκτελεστούν οι πράξεις

i) $(\alpha + \beta - \gamma)^2$

ii) $(\alpha - 2\beta + \gamma)^2$

Λύση

i) $(\alpha + \beta - \gamma)^2 = [\alpha + \beta + (-\gamma)]^2$
 $= \alpha^2 + \beta^2 + (-\gamma)^2 + 2\alpha\beta + 2\beta(-\gamma) + 2(-\gamma)\alpha$
 $= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha$

ii) $(\alpha - 2\beta + \gamma)^2 = [\alpha + (-2\beta) + \gamma]^2$
 $= \alpha^2 + (-2\beta)^2 + \gamma^2 + 2\alpha(-2\beta) + 2(-2\beta)\gamma + 2\gamma\alpha$
 $= \alpha^2 + 4\beta^2 + \gamma^2 - 4\alpha\beta - 4\beta\gamma + 2\gamma\alpha$